Практическое занятие. Тема 10

Дифференцирование обратных и параметрически заданных функций. Производные высших порядков. Правило Лопиталя. Монотонность функции. Экстремум функции. Построение графика функции

Производные высших порядков

Производной второго порядка или второй производной формы $Y=S(X)$. Обозначается вторая производная одним из следующих символов: $y^n, f^n(x), \frac{d^2y}{dx^2}$. Если $s=s(t)$ — закон прямолинейного движения материальной точки, то $s'=\frac{ds}{dt}$ — скорость, а $s^n=\frac{d^2s}{dt^2}$ — ускорение этой точки.

Если зависимость функции у от аргумента х задана в параметрическом виде уравнениями $x=x(t), y=y(t)$ то:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}, \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{y'}{x'})\frac{1}{x'}, \qquad (3)$$

где штрих обозначает производную по t.

Производной n-го порядка функции $y=f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка данной функции. Для n-й производной употребляются следующие обозначения: $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^ny}{dx^n}$.

Таким образом,

$$y^n=(y^{(n-1)})'=\frac{dy^{(n-1)}}{dx}$$

<u>Пример 1.</u> Найти производную второго порядка функции $y=1n(x+\sqrt{x^2+a^2})$.
Имеем:

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2})}-(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}})=\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$y''=-\frac{1}{2}(x^2+a^2)^{-3/2}\bullet 2x=-\frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}.$$

<u>Пример 2.</u> Вычислить значения первой и второй производных функции $y=(2x-1)^4$ в точках

$X_1=1, X_2=-1$

Находим первую производную: $y'=8(2x-1)^3$. При $X=1$ имеем $y'(1)=8$, а при $X=-1 y'(-1)=-216$.
Далее, $y''=48(2x-1)^2, y''(1)=48, y''(-1)=432.$

<u>Пример 3.</u> Найти производную n-го порядка функции $y=\sin x$.
Дифференцируя последовательно n раз данную функцию, находим:

$$y'=\cos x=\sin(X+p/2),$$
$$y''=\cos(X+\frac{p}{2})=\sin(X+2\bullet\frac{p}{2}),$$
$$y'''=\cos(X+2\bullet\frac{p}{2})=\sin(X+3\bullet\frac{p}{2}),$$
....
$$y^{(n)}=\cos(X+(n-1)\frac{p}{2})=\sin(X+n\frac{p}{2}).$$

Пример 4. Найти вторую производную функции, заданной параметрическим уравнениями: $X=\ln t, y=t^3+2t+1$

В соответствии с формулами /6.3./ имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+2}{1/t}=3t^3+2t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{9t^2+2}{1/t}=9t^3+2t$$

Аудиторные занятия:

1. Найти вторую производную функции $y=(1+4x^2)arctg 2x$.
2. Найти значения производных любого порядка функции $y=x^3-5x^2+7x-2$ в точке $x=2$.
3. Дано уравнение движения точки по оси $Ox: x=100+5t-0{,}001t^3$ (x измеряется в метрах, t - в секундах). Найти скорость v и ускорение w этой точки в моменты времени $t=0;1;10$ с. (Ответ: $v=5;4{,}997;4{,}7$ м/с, $w=0;-0{,}006;-0{,}06\,м/с^2$.)
4. Найти вторые производные функций, заданных уравнениями:
   а) $y=t^3+t^2-1$, $x=t^3+t+1$; б) $y=2\sin^3 t$, $x=2\cos^3 t$.
5. Вычислить значение второй производной функции y, заданной уравнением $x^4-xy+y^4-1=0$, в точке $M(0{,}1)$. (Ответ: -1/16.)
6. Записать уравнения касательной и нормали в точке $M_0(2{,}2)$ к кривой $x=\frac{1+t}{t^3}$, $y=\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}$. (Ответ: $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$.)
7. Показать, что функция $y=C_1\ell^{2x}+C_2\ell^{3x}$ при любых постоянных C_1 и C_2 удовлетворяет уравнению $y''-5y'+6y=0$.

Домашние задания:

1. Найти производную второго порядка функции $y=(x^2+1)\ln(1+x^2)$

2. Найти вторую производную функции, заданной уравнениями: $y=t^3+t$. $x=t^2-2t$

3. Найти производную второго порядка функции $y=\ell^{-3x}(\cos 2x+\sin 2x)$

1. Вычислить значение второй производной функции у, заданной уравнением $x^3+y^3-xy=1$, в точке $М_1$ (1,1).
2.

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть *y = f(u),* а *u*= *u*(*x*). Получаем функцию *y*, зависящую от аргумента *x*: *y = f(u(x)).* Последняя функция называется функцией от функции или *сложной функцией*.

Областью определения функции *y = f(u(x))* является либо вся область определения функции $u=u(x)$ либо та ее часть, в которой определяются значения u, не выходящие из области определения функции $y=f(u)$.

Примеры.

1. $y = \sin x^2$. Тогда $y' = \cos x^2 \cdot \left(x^2\right)' = \cos x^2 \cdot 2x$.

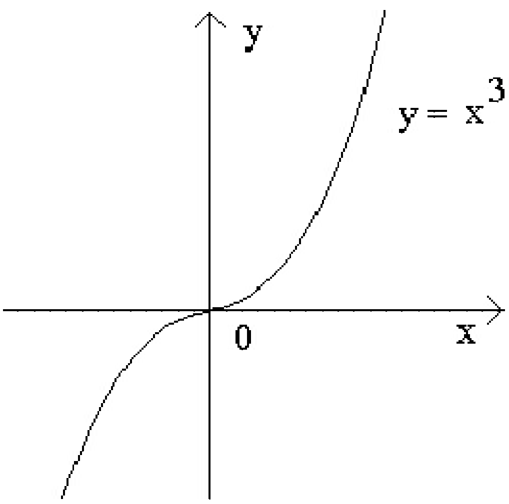
2. $y = \left(x + \frac{2}{x}\right)^{100}$, $y' = 100\left(x + \frac{2}{x}\right)^{99} \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right)' = 100\left(x + \frac{2}{x}\right)^{99} \cdot \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$

3. $y = \ln^3(x+3)$, $y' = 3\ln^2(x+3) \cdot (\ln(x+3))' = 3\ln^2(x+3) \cdot \frac{1}{x+3}$.

4. $y = \ln\cos\frac{1-2x}{3}$,
$$y' = \frac{1}{\cos\frac{1-2x}{3}} \cdot \left(\cos\frac{1-2x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos\frac{1-2x}{3}} \cdot \sin\frac{1-2x}{3} \cdot \left(\frac{1-2x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos\frac{1-2x}{3}} \cdot \sin\frac{1-2x}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

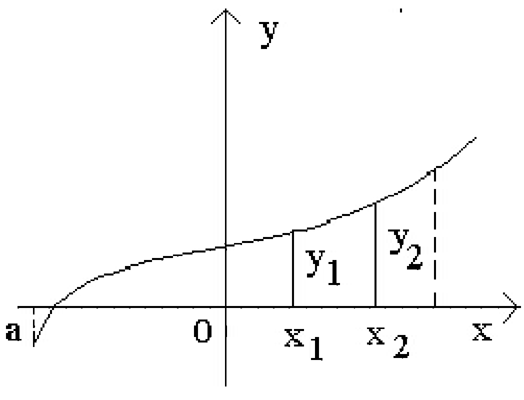
Начнем с примера. Рассмотрим функцию $y= x^3$. Будем рассматривать равенство $y= x^3$ как уравнение относительно x. Это уравнение для каждого значения y определяет единственное значение x: $x = \sqrt[3]{y}$. Геометрически это значит, что всякая прямая параллельная оси Ox пересекает график функции $y= x^3$ только в одной точке. Поэтому мы можем рассматривать x как функцию от y. Функция $x = \sqrt[3]{y}$ называется обратной по отношению к функции $y= x^3$.



Прежде чем перейти к общему случаю, введем определения.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на некотором отрезке, если большему значению аргумента x из этого отрезка соответствует большее значение функции, т.е. если $x_2>x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

Аналогично функция называется *убывающей*, если меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. если $x_2 < x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.



Итак, пусть дана возрастающая или убывающая функция $y= f(x)$, определенная на некотором отрезке $[a; b]$. Для определенности будем рассматривать возрастающую функцию (для убывающей все аналогично).

Рассмотрим два различных значения x_1 и x_2.

Пусть $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$. Из определения возрастающей функции следует, что если $x_1<x_2$, то $y_1<y_2$. Следовательно, двум различным значениям x_1 и x_2 соответствуют два различных значения функции y_1 и y_2. Справедливо и обратное, т.е. если $y_1<y_2$, то из определения возрастающей функции следует, что$x_1<x_2$. Т.е. вновь двум различным значениям y_1 и y_2 соответствуют два различных значенияx_1 и x_2. Т.о., между значениями x и соответствующими им значениями y устанавливается взаимно однозначное соответствие, т.е. уравнение $y=f(x)$ для каждого y (взятого из области значений функции $y=f(x)$) определяет единственное значение x, и можно сказать, что x есть некоторая функция аргумента y: $x= g(y)$.

Эта функция называется *обратной* для функции $y=f(x)$. Очевидно, что и функция $y=f(x)$ является обратной для функции $x=g(y)$.

Примеры.

1. y = arcsin x. Рассмотрим обратную функцию x = sin y. Эта функция в интервале $-\pi/2<y<\pi/2$ монотонна. Ее производная $x' = \cos y$ не обращается в этом интервале в нуль. Следовательно, по теореме о производной обратной функции

   $$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}.$$

   Но на $(-\pi/2;\ \pi/2)$ $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$.

   Поэтому

   $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. Аналогично

   $$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

   Докажите самостоятельно.

3. y = arctg x. Эта функция по определению удовлетворяет условию существования обратной функции на интервале $-\pi/2< y < \pi/2$. При этом обратная функция x = tg y монотонна. По ранее доказанному $x' = \dfrac{1}{\cos^2 y}$.

   Следовательно, $y' = \cos^2 y$. Но $\cos^2 y = \dfrac{1}{1+tg^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   Поэтому

   $$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Аудиторные занятия:

1. Найти производные указанных функций:

а) $y = 3^{x^2} - tg^4 2x$; б) $y = x^3 tg^3 x$;

в) $y = \lg^4\left(x^5 - \sin^5 2x\right)$; г) $y = arctg\sqrt{1 + e^{-x^3}}$.

2. Найти производные следующих функций:

а) $y = (\sin 3x)^{\cos 5x}$; б) $y = \left(x^3 + 1\right)^{tg 2x}$.

3. Найти производные функций y, заданных неявно следующими уравнениями:

а) $e^{xy} - x^3 - y^3 = 3$; б) $xy - arctg\dfrac{x}{y} = 3$; в) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a$.

(Ответ: а) $y' = \left(3x^2 - \ell^{xy} y\right)/\left(-3y^2 + \ell^{xy} x\right)$; б) $y' = -\left(x^2 y + y^3 - y\right)/\left(x^3 + xy^2 + x\right)$; в) $y = -\sqrt[3]{(y/x)^2}$.)

Домашние задания:

Найти производные данных функций.

1. а) $y = x^3 \ln^2\left(\sin^2 x - tg^2 x\right)$; б) $y = (tg3x)^{x^4}$; в) $\ell^{x^2y^2} - x^4 + y^4 = 5$.

(Ответ: $y' = -\dfrac{\ell^{x^2y^2} \cdot 2xy^2 - 4x^3}{4y^3 + \ell^{x^2y^2} \cdot 2yx^2}$.)

2. а) $y = ctg^2 3x \cdot \ell^{-\cos^2 3x}$; б) $y = \left(1 + x^4\right)^{tg 7x}$; в) $y^2 + x^2 - \sin\left(x^2 y^2\right) = 5$.

(Ответ: $y' = -\dfrac{2xy^2 \cos\left(x^2 y^2\right) - 2x}{2y - 2yx^2 \cos\left(x^2 y^2\right)}$.)

3.а) $y = \ell^{-x^2} arctg\sqrt{x^3 - 1}$; б) $y = (ctg5x)^{x^3 - 1}$; в) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

(Ответ: $y' = -\dfrac{2^x - 2^{x+y}}{2^y - 2^{x+y}}$.)

Дифференциал функции первого и высшего порядков. Применение дифференциала в приближенных вычислениях функции

Дифференциалом первого порядка функции y=f(x) называется главная часть ее приращения, линейно зависящая от приращения *Δx=dx* независимой переменной *x*. Дифференциал *dy* равен произведению ее производной и дифференциала независимой переменной;

$$dy = y'dx = f'(x)dx,$$

поэтому справедливо равенство

$$y' = dy/dx.$$

Дифференциал функции *dy* отличается от ее приращенния *Δy* на бесконечно малую высшего порядка по сравнению с *Δx*. Непосредственно из определения дифференциала и правил нахождения производных имеем *(u=u(x),v=v(x));*

1) $dC=0$ (C-const)
2) $dx=\Delta x$, если x-независимая переменная
3) $d(u\pm v)=du\pm dv$
4) $d(uv)=vdu+udv$
5) $d(Cu)=Cdu$
6) $d(u/v)=(vdu-udv)/v^2$ $(v\neq 0)$
7) $df(u)=f'u(u)u'dx=f'(u)du$

<u>*Пример 1.*</u> Найти дифференциал функции $y=sin\ \ 3x$

$$y'=5sin3x\ cos3x * 3,$$

тогда

$$dy=15sin3x\ cos3xdx.$$

Дифференциалом n-го порядка y=f(x) называется дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка этой функции,т.е

$$d^n y = d(d^{n-1}y)$$

Если дана функция y=f(x), где x- независимая, то

$$d^2y=y''dx^2, d^3y=y'''dx^3, \ldots, d^n y=y^{(n)}\ dx.$$

Если $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, то

$$d^2y= y''(du)^2+y'd^2u,$$

где дифференцирование функции y выполняется по переменной u . (Это имеет место и для дифференциалов более высоких порядков.)

Аудиторные занятия:

1. Даны функция $y=x^3-2x^2+2$ и точка $x_0=1$. Для любого приращения независимой переменной Δx выделить главную часть приращения функции. Оценить абсолютную величину разности между приращением функции и ее дифференциалом в данной точке, если: а) $\Delta x=0{,}1$; б) $\Delta x=0{,}01$. Сравнить эту разность с абсолютной величиной дифференциала функции. (Ответ: а) $\varepsilon=|\Delta y-dy|=0{,}011$, $\varepsilon/|dy|\cdot 100=11$; б) $\varepsilon=0{,}000101$, $\varepsilon/|dy|\cdot 100=1{,}01$.)

2. Найти дифференциалы первого порядка следующих функций:
а) $y=xtg^3x$; б) $y=\sqrt{arctgx}+(\arcsin x)^2$;
в) $y=\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)$.

3. Найти дифференциал второго порядка функции $y=e^{-x^3}$.

4. Найти дифференциалы третьего порядка функций:
а) $y=\sin^2 2x$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

5. Найти приближенное значение функции $y=x^3-4x^2+5x+3$ при $x=1{,}03$ с точностью до двух знаков после запятой. (Ответ: 5,00.)

6. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{17}$ с точностью до двух знаков после запятой. (Ответ: 2,03.)

Домашние задания:

1. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции $y = x^3 \ln x$;

2. Найти приближенное значение функции $y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ при $x = 0{,}1$ с точностью до двух знаков после запятой. (Ответ: 0,93.)

3. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $y = (x^2 + 1)arctgx$;

4. Вычислить приближенное значение функции $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ при $x = 0{,}98$ с точностью до двух знаков после запятой. (Ответ: 2,08.)

Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя и формула Тейлора.

Теорема 1 (Ролля). Если функция *y= f(x)* непрерывна на отрезке *[a; b]* ; дифференцируема внутри этого отрезка и *f (a) =f (b);* то существует по крайней мере одна точка *x=c* (a < c < b), такая, что *f∈ (c)=0.*

Теорема 2 (Лагранжа). Если функция *y =f(x)* непрерывна на отрезке *[a; b];* и дифференцируема внутри этого отрезка, то существует по крайней мере одна точка *x=c* (a < c< b), такая, что

f (b)-f (a)= f∈ (c) (b-a) ,

Это формула называется формулой Лагранжа конечных приращений.

Правило Лопиталя (для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$). Если функции *y=f(x) и* $y=\varphi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы коши в некоторой окрестности точки $x=x_0$, стремятся к нулю (или $\pm\infty$) при $x\to x_0$ и существуют также $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и эти пределы равны, т.е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \quad .$$

Правило Лопиталя справедливо и при $x_0=\pm\infty$.

Если частное $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ вновь дает в предельной точке неопределенность одного их двух названных видов и функции $f'(x)$; $\varphi'(x)$ удовлетворяют всем требованиям, ранне указанным для функций f(x) и y=φ (x), то можно перейти к отношению вторых производных и т.д. Однако следует помнить, что предел отношения самих функций может существовать, в то время как отношения самих функций может существовать, в то время как отношение производных не стремится ни к какому пределу.

<u>*Пример 1.*</u> Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 5x}$

Числитель и знаменатель данной дроби непрерывны, дифференцируемы и стремятся к нулю. Это означает, что можно применить правило Лопиталя дважды:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{4\sin x}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{4*4\cos 4x}{2} = 8$$

Аудиторные занятия:

Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}$, a>0; д) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{tg\frac{\pi}{2}x}{\frac{1}{x-1}}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}$;

Ответ: а) 1; б) 0; в) 0; г) –5/2; д) $-2/\pi$; ж) 3.

Домашние задания:

Найти указанные пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$; (ответ : $\frac{2}{3}$)
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+x-1}$; (Ответ: 0)
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{2x^2}$; (Ответ: $\frac{1}{4}$)
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{7x}-1}{tg3x}$; (Ответ: $\frac{7}{3}$)
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{tgx-x}{\sin x-x}$; (Ответ: -2)

Аудиторные занятия:

Получить следующие разложения основных элементарных функций в окрестности точки *$x_0=0$:*

а) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}+R_n(x)$

$R_n=(-1)^{n+1}\,\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\varepsilon_0}\right)^n$

б) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1}+R_{2n+1}(x)$

$R_{2n+1}(x)=(-1)^n\frac{\cos\varepsilon x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

в) разложить функцию $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ по степеням (x-2) до члена, содержащего $(x-2)^4$

Ответ:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)+\frac{1*3}{2*4}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\frac{1*3*5}{2*4*6}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\frac{1*3*5*7}{2*4*6*8}\left(\frac{x-2}{2}\right)^4\right]$$

Домашние задания:

1. Разложить многочлен $P(x)= x^4-2x^3+7x-4$ по степеням $(x-1)$
Ответ: $P(x)= (x-1)^4 +2(x-1)^3+5(x-1)+2$.

2. Разложить по степеням x функцию $f(x)=\sqrt{1-x}$ до члена, содержащего x^4

Ответ: $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4$.

Исследование функции методами дифференциального исчисления.

Одной из важнейших задач дифференциального исчисления является разработка общих примеров исследования поведения функций.

Функция $y=f(x)$ называется возрастающей (убывающей) в некотором интервале, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е. при $x1<x2$ выполняется неравенство $f(x1)<f(x2)(f(x1)>f(x2))$.

Перечислим признаки возрастания (убывания) функции.

1.Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ возрастает (убывает), то ее производная на этом отрезке неотрицательна (неположительна), т.е. $f'(x)\geq 0(f'(x)\leq 0)$.

2.Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемая внутри него функция имеет положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) на этом отрезке.

Функция $y=f(x)$ называется неубывающей (невозрастающей) в некотором интервале, если для любых $x1<x2$ из этого интервала $f(x1)\leq f(x2)$ $(f(x1)\geq f(x2))$.

Интервалы, в которых функция не убывает или не возрастает, называются интервалами монотонности функции. Характер монотонности функции может изменяться только в тех точках ее области определения, в которой меняется знак первой производной. Точки, в которых первая производная функции обращается в нуль или терпит разрыв, называются *критическими*.

Пример 1. Найти интервалы монотонности и критические функции $y=2x^2-\ln x$.

►Данная функция определена при $x>0$. Находим ее производную:

$y'=4x-1/x=(4x^2-1)/x$.

В области определения функции $y'=0$ при $4x^2-1=0$, т.е. при $x_0=½$. Найденная точка разбивает область определения функции на интервалы (0 ; ½) и (½ ; + ∞); в первом из них $y'<0$, а во втором $y'>0$. Это означает, что в первом интервале (0 ; 0,5) данная функция убывает, а в интервале (0,5 ; + ∞) – возрастает.◄

Точка x_1 называется точкой локального максимума функции $y=f(x)$, если для любых достаточно малых $\Delta x \neq 0$ выполняется неравенство $f(x1+\Delta x) <f(x1)$. Точка $x2$ называется точкой локального минимума функции $y=f(x)$, если для любых достаточно малых $\Delta x \neq 0$ справедливо неравенство $f(x2+\Delta x) <f(x2)$. Точки максимума и минимума называют точками экстремума функции, а максимумы и минимумы функции –ее экстремальными значениями.

Теорема 1 (необходимый признак локального экстремума). Если функция $y=f(x)$ имеет в токе $x=x_0$ экстремум, то либо $f'(x_0)=0$, либо $f'(x_0)$ не существует. В точках экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси Ox.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $y=(x+1)^3$.

►Производная данной функции $y'=3(x+1)^2$ в точке $x = -1$ равна нулю. Но в этой точке функция экстремума не имеет, т.к. $(x+1)^3>0$ при $x>-1$, $(x+1)^3<0$ при $x<-1, (x+1)^3=0$ при $x=-1$. Итак, обращение в нуль производной функции не обеспечивает существования экстремума функции.◄

Из рассмотренных примеров следует, что не во всякой критической точке функция имеет экстремум. Однако если в какой- либо точке функция достигает экстремума, то эта точка всегда является критической.

Для отыскания экстремумов функции поступают следующим образом: находят все критические точки, а затем исследуют каждую из них (в отдельности) с целью выяснения, будет ли в этой точке максимум или минимум, или же экстремума в ней нет.

Теорема 2 (первый достаточный признак локального экстремума).

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x=x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0).Если

$f'(x)$ при $x<x_0$ положительна, а при $x>x_0$ отрицательна, то при $x= x_0$ функция $y=f(x)$ имеет максимум. Если же $f'(x)$ при $x<x_0$ отрицательна, а при $x>x_0$ положительна, то при $x=x_0$ данная функция имеет минимум.

Следует иметь в виду, что указанные неравенства должны выполняться в достаточно малой окрестности критической точки $x=x_0$. Схема исследования функции $y=f(x)$ на экстремум с помощью первой производной может быть записана в виде таблицы (см. табл.1).

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$.

►Данная функция определена и непрерывна для всех $x\in\boldsymbol{R}$. Находим ее ~~про~~изводную:

$$y' = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x}+1\right).$$

Критическими точками данной функции будут $x_1 = -1$, в которой $y'=0$, и $x_2 = 0$, в которой производная y' терпит разрыв.

табл.1

Знаки f'(x) при переходе через критическую точку x0			Характер критической точки
$x<x_0$	$x=x_0$	$x>x_0$	
+	$f'(x_0)=0$ или не существует	—	Точка максимума
—	»	+	Точка минимума
+	»	+	Экстремума нет (функция возрастает)
—	»	—	Экстремума нет (функция убывает)

Эти точки разбивают область определения функции на интервалы: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; +\infty)$, в каждом из которых производная функций сохраняет знак. По этому достаточно определить знак производной в произвольной точке каждого из интервалов. Имеем: $y'(-8)=1>0$, т.е. в интервале $(-\infty;-1)$ функция возрастает; $y'(-1/8)=$
$=-2<0$, следовательно, в интервале $(-1;0)$ функция убывает; $y'(1)=3>0$, т.е. в интервале $(0;+\infty)$ функция возрастает. Значит, при переходе через точку $x_1=-1$ в направлении возрастания x знак первой производной изменяется с «+» на «-», т.е. точка $x_1=-1$ является точкой локального максимума и $y_{max} = y(-1) = 1$. Для точки $x_2=0$ является точкой локального минимума и $y_{min} = y(0)=0$

Теорема 3 (второй достаточный признак локального экстремума функции).

Пусть функция y=f(x) дважды дифференцируема и f'(x0) = 0. Тогда в точке x=x0 функция имеет локальный максимум, если f'' (x0)< 0, и локальный минимум, если f''(x0)> 0.

В случае, когда f'(x0) = 0, точка x=x0 может и не быть экстремальной .

Пример 4. С помощью второй производной исследовать на экстремум функцию $y = x^2e$
►Находим первую и вторую производные:
$y' = 2xe - x^2e = (2x - x^2)\ e$,
$y'' = (2 - 2x)e - (2x - x^2)e = (x^2 - 4x + 2)e$.

Так как производная непрерывна при $x \in \boldsymbol{R}$,то критические точки данной функции удовлетворяют уравнению $2x - x^2 = 0$, откуда $x_1 = 0$
и $x_2 = 2$. Вычисляем значения второй производной в этих точках: $y''(0) = 2>0$, т.е. $x_1 = 0$ — точка минимума; $y''(2) = -2e^{\ 2} < 0$, т.е. $x_2 = 2$
— точка максимума; $y_{min} = 0$, $y_{max} = 4\ e^{\ 2}$ ◄

На отрезке *[a; b]* функция *y=f(x)* может достигать *наименьшего* ($y_{наим}$) или *наибольшего* ($y_{наиб}$) значения либо в критических точках функции, лежащих в интервале *(a; b)*, либо на концах отрезка *[a; b]*.

Пример 5**.** Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x + 3$ на отрезке *[- 2; 3]*.

► Производная данной функции $y' = 3x^2 - 3$. Тогда $y' = 0$ при $x_1 = -1$ *и* $x_2 = 1$. Обе эти критические точки принадлежат интервалу (- 2; 3). Вычисляем значения функции в критических точках и на концах отрезка: $y(-1) = 5$, $y(1) = 1$, $y(-2) = 1$, $y(3) = 21$. Сравнивая полученные числа, заключаем, что наименьшее значение на отрезке *[- 2; 3]* функция принимает в точках $x_2 = 1$ *и* $x = a = -2$,а наибольшее значение — в точке $x = b = 3$. итак, на отрезке *[-2; 3]* $y_{наим} = 1$, а $y_{наиб} = 21$.◄

Кривая, заданная функцией *y=f(x)*, называется выпуклой в интервале *(a;b),* если все точки кривой лежат не выше любой ее касательной в этом интервале, и вогнутой в интервале *(a;b),* если все точки лежат не ниже любой ее касательной в этом интервале.

Точка кривой $M(x_0, f(x_0))$, отделяющая выпуклую ее часть от вогнутой, называется точкой перегиба кривой. Предполагается, что в точке *M* существует касательная.

Теорема 4 (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). Если во всех точках интервала *(a;b)* вторая производная функции *y=f(x)* отрицательна (положительна), т.е. $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$, то кривая *y=f(x)* в этом интервале выпукла (вогнута).

В точке перегиба, отделяющий промежуток выпуклости от промежутка вогнутости, вторая производная функции изменяет свой знак, поэтому в таких точках вторая производная функции или обращается в нуль, или не существует.

Теорема 5 (достаточный признак точки перегиба).
Если в точке $x = x_0$ $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через эту точку производная $f''(x)$ меняет знак, то точка со абсциссой $x = x_0$ кривой *y=f(x)* - точка перегиба.

Пример 6. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = e^{\frac{-x^2}{2}}$ (кривая Гаусса).

►Находим первую и вторые производные:

$$y' = -xe^{\frac{-x^2}{2}},\ y'' = e^{\frac{-x^2}{2}}\left(x^2 - 1\right).$$

Первая и вторая производные существуют при любых $x \in \boldsymbol{R}$. Приравнивая *y''* нулю, находим: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Легко заметить, что в окрестности точки $x_1 = -1$ знак второй производной меняется по следующему закону: $y'' > 0$ при $x < -1$, $y'' < 0$ при $x > -1$. Значит, $M_1(-1, e^{-1/2})$ является точкой перегиба. Слева от этой точки кривая вогнута, так как в интервале $(-\infty; -1)$ $y'' > 0$, а справа в интервале (-1;1)-выпукла, так как в этом интервал $y'' < 0$.

Далее $y''>0$ при $x>1$. Следовательно, при $x_2=1$ на кривой так же имеем точку перегиба $M_2(1,e^{-1/2})$. Слева от точки M_2 в интервале (-1;1) кривая выпукла, а справа в (1;+∞) вогнута.

Прямая L называется <u>асимптотой</u> данной кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки M кривой до прямой L при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю. Из определения следует, что асимптоты могут существовать только у кривых, имеющих сколь угодно далекие точки («неограниченные» кривые). В примере 6 кривая Гаусса имеет асимптоту $y=0$.Если существуют числа $x=_{xi}$ $(i=l,n)$, при которых $\lim\limits_{x\to x_i} f(x) = \pm\infty$,
т.е. функция имеет бесконечные разрывы, то прямые $x=x_i$ называются вертикальными асимптотами кривой $y=f(x)$.

Если существуют пределы

$k = \lim f(x)/x$, $b=\lim (f(x)-kx)$,

то прямые $e=kx+b$- наклонные асимптоты кривой $y=f(x)$ (при $k=0$- горизонтальные). При $x\to\pm\infty$ может прийти к двум значениям для k. Если имеем одно значение для k, то при $x\to\pm\infty$ можем получить два значения для b.

<u>*Пример 7.*</u> Найти асимптоты кривой $y=x^3/(x^2-1)$.

► Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3/(x^2-1)=\pm\infty$, то данная кривая имеет две
вертикальные асимптоты $x=\pm 1$. Ищем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} y/x=\lim_{x\to\pm\infty} x^2/(x^2-1)=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(x^3/(x^2-1)-x)=\lim_{x\to\pm\infty} x/(x^2-1)=0.$$

Таким образом, у данной кривой существует одна наклонная асимптота, уравнение которой $y=x$

Аудиторные занятия:

1. Найти интервалы монотонности функции $y = x^4 - 2x^2 - 5$.(Ответ: убывает в $(-\infty;1)$ и (0;1), возрастает в (-1;0) и $(1;+\infty)$.)
2. Найти интервалы монотонности функции $y = x/(x^2 - 6x - 16)$. (Ответ: убывает в $(-\infty;-2)$,(-2;8),$(8;+\infty)$.)
3. Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 5)^2}$. (Ответ: $y_{\min} = 0$ при $x = 1$ и $x = 5$, $y_{\max} = 2\sqrt[3]{2}$ при $x = 3$.)
4. Исследовать на экстремум функцию $y = x\ln^2 x$. (Ответ: $y_{\max} = 4/e^2$ при $x = e^{-2}$, $y_{\min} = 0$ при $x = 1$.)
5. Исследовать на экстремум функцию $y = x - \ln(1 + x)$. (Ответ: $y_{\min} = 0$ при $x = 0$.)
6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке $[-1;5]$. (Ответ: $y_{наим} = -6$ при $x = 1$, $y_{наиб} = 266$ при $x = 5$.)
7. Найти точки перегиба, интервалы вогнутости и выпуклости графика функции $y = \ln(1 + x^2)$. (Ответ: $M_1(1,\ln 2), M_2(-1,\ln 2)$.)
8. Найти асимптоты графика функции $y = x^2/\sqrt{x^2 - 1}$. (Ответ: $x = \pm 1, y = \pm x$.)

Домашние задания:

1. 1) Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$;

   2) найти асимптоты кривой $y = x^3/(2(x + 1)^2)$. (Ответ: 1) $y_{\min} = 0$ при $x = \pm 1$, $y_{\max} = 1$ при $x = 0$; 2) $x = -1, y = x/2 + 1$.)

2. 1) Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = arctgx - x$;

2) найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x + 3\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[-1;1]$. (Ответ: 1) $O(0,0)$, $(-\infty;0)$- вогнутая, $(0;+\infty)$- выпуклая; 2) $y_{наим} = -4, y_{наиб} = 4$.)

3. 1) Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$;

2) доказать справедливость неравенства $x \rangle \ln(1 + x)$ при $x \rangle 0$. (Ответ: 1) $y_{\max} = 12$ при $x = -1$, $y_{\min} = -20$ при $x = 3$.)

СХЕМА ПОЛНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

Для полного исследования функции и построение ее графика можно рекомендовать следующую примерную схему:

1) указать область определения функции;
2) найти точки разрыва функции, точки пересечения ее графика с осями координат и вертикальные асимптоты (если они существует);
3) установить наличие или отсутствие четности, нечетности периодичности функции;
4) исследовать функцию монотонность и экстремум ;
5) определить интервалы выпуклости вогнутости , точки перегиба;
6) найти асимптоты графика функции;
7) произвести необходимые дополнительные вычисления;
8) построить график функции.

Пример. Провести полное исследования функции:

$$y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$$

и построить ее график.

► Воспользуемся рекомендуемой схемой.

1. Данная функция определена для всех *x Є R*.
2. Функция не имеет точек разрыва и пересекает ось *Ox* при $x = -3$ и $x = 0$, а ось *Oy* - при $y = 0$.
3. Функция не является четной, нечетной, периодической.
4. Находим производную функцию:

$$f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}$$

$f'(x)=0$ при $x_1 = -2$ и не существует в точках $x_2 = -3$, $x_3 = 0$. Эти точки разбивают всю область определения функции на интервалы (-∞; -3), (-3;-2), (-2; 0), (0;+ ∞).
Внутри каждого из полученных, а именно:$f'(x)>$ 0 в интервалах (-∞; -3),(-3;-2),
и $f'(x)<0$ в (-2; 0).Это означает что функция возрастает в интервале(-∞;-2), убывает в интервале (-2; 0) и возрастает в интервале (0; + ∞). Так как в окрестности точки x_1 =-1 знак первой производной при увеличении *x* изменяется "+" на "-",то x_1 =-2 является точкой максимума , $y_{max}\sqrt[3]{4}$. Для точки $x_3 = 0$ знак первой производной изменяется с "+" на "-" ,т.е. $x_3 = 0$ - точка минимума, $y_{min} = y(0) = 0$. В точке $x = -3$ функция не имеет экстремума так как в ее окрестности $f'(x)$ не меняет знак.

5.Находим вторую производную:

$$f''(x) = -\frac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}$$

которая не равна нулю для любого конечного *x*. Поэтому точками перегиба могут быть только те точки кривой, в которых вторая производная не существует, т. е. $x_2 = -3$ и $x_3 = 0$. Определим знак y'' в каждом из интервалов, на которые найденные точки разбивают область определения функции:

$f''(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -3)$, кривая вогнута ; $f''(x) < 0$ при $x \in (-3; 0)$, кривая выпукла. Так как в окрестности точки $x_2 = -3$ вторая производная меняет знак, то $M(-3; 0)$ является точкой перегиба. Точка $x_3 = 0$ не является точкой перегиба, так как в ее окрестности знак $f''(x)$ не меняется.

6. Вертикальных асимптот нет, так как данная функция не имеет бесконечных разрывов. График функции имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$, если существует пределы для k и b, указанные в правиле нахождения наклонной асимптоты. Вычислим их для данной функции:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{(x+3)x^2}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{(x+3)x^2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{(x+3)x}^{2} - x\right)\left(\sqrt[3]{(x+3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x^1+3)x^2} + x^2\right)}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)x^2} + x^2} =$$

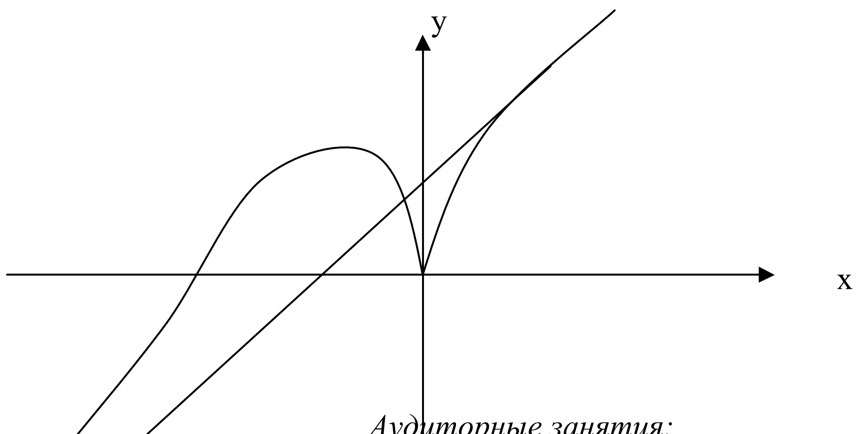
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+3)x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)x^2} + x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{1 + 6/x + 9/x^2} + \sqrt[3]{1 + 3/x} + 1} = 1$$

Получили уравнение наклонной асимптоты $y = x + 1$.

Прежде чем строить график функцию, целесообразно установить угол α, под которым кривая пересекает ось абсцисс в точках $x_2 = -3$ и $x_3 = 0$. В этих точках $y' = tg\alpha = \infty$ и $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Так как в точке $x_3 = 0$ функция достигает нулевого минимума, то ее график не расположен ниже оси ох в окрестности этой точки. Точка $x_3 = 0$ является точкой возврата графика функции.

8 . по результатам исследования строите график функции.



Аудиторные занятия:

Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

1. $У = x^3 - 3x^2$. (Ответ: $У_{max} = О$ при $x = 0$; $Y_{min} = -4$ при $x = 2$; точка перегиба $M_1(1, -2)$.)

2. $У = x^2+2/x$. (Ответ: $Y_{\min} = 3$ при $x = 1$; точка перегиба $M_1 \left(-\sqrt[3]{2,0}\right)$ j асимптота $x =$ о.)

3. $У = x^3/(3 - x^2)$. (Ответ: точки разрыва $x = \pm\sqrt{3}$ $Y_{\min} = 4,5$ при x = -3; $У_{\max} = -4,5$ при $x = 3$; точка перегиба $M1$ (О, О); асимптоты $x = \pm\sqrt{3}$ *и* $y = -x$.)

Домашние задания:

Провести полное исследование данных функций и построить их графики.

1. $У = In(x^2 +2x+2)$. (Ответ: $Y_{\min}$ = О при $x = -1$; точки перегиба $M_1(-2,\ln 2)$ и $M_2(0,ln2)$.),

2. $У = (2x - 1)/(x - 1)^{2.}$ (Ответ: $Y_{\min} = -1$ при $x = o$; точка перегиба $M_1(-1/2, -8/9)$; асимптоты $x = 1$ и $У = O$.)
3. $У = -ln(x^2 -4x+5)$. (Ответ: $У_{\text{тах}}$ = О при $x = 2$; точки перегиба M_1 $(1,ln2)$, $M_2(3, ln2)$.)

Задания

1. Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$;
2. Найти асимптоты кривой $y = x^3/\left(2(x+1)^2\right)$. (Ответ: 1) $y_{\min} = 0$ при $x = \pm 1$, $y_{\max} = 1$ при $x = 0$; 2) $x = -1, y = x/2 + 1$.)
3. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = arctgx - x$;
4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x + 3\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[-1;1]$. (Ответ: 1) $O(0,0)$, $(-\infty;0)$- вогнутая, $(0;+\infty)$- выпуклая; 2) $y_{наим} = -4, y_{наиб} = 4$.)
5. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$;
6. Доказать справедливость неравенства $x \rangle \ln(1+x)$ при $x \rangle 0$. (Ответ: 1) $y_{\max} = 12$ при $x = -1$, $y_{\min} = -20$ при $x = 3$.)
7. Провести полное исследование данных функций и построить их графики.
А) $У = In(x^2 +2x+2)$. (Ответ: $Y_{\min}$ = О при $x = -1$; точки перегиба $M_1(-2,\ln 2)$ и $M_2(0,ln2)$.),
Б) $У = (2x - 1)/(x - 1)^{2.}$ (Ответ: $Y_{\min} = -1$ при $x = o$; точка перегиба $M_1(-1/2, -8/9)$; асимптоты $x = 1$ и $У = O$.)
В) $У = -ln(x^2 -4x+5)$. (Ответ: $У_{\text{тах}}$ = О при $x = 2$; точки перегиба M_1 $(1,ln2)$, $M_2(3, ln2)$.)